ESSEC
ÉCOLE SUPÉRIEURE DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET COMMERCIALES
Etablissement Privé d'Enseignement Supérieur Reconnu par l'Etat

MATHEMATIQUES

2ème épreuve - (Coef. 4)

JEUDI 18 MAI 1978 de 8 h à 12 h.

Les parties I - II - III (sauf III-5) sont indépendantes.

QUESTION PRELIMINAIRE

X désignant une variable aléatoire discrète dont l'ensemble des valeurs prises est $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$ et, pour tout entier i tel que $0 \leqslant i \leqslant n$, p_i désignant la probabilité de l'évènement $X = i$, on appelle *fonction génératrice* de la variable aléatoire X, la fonction polynôme F_X définie pour tout nombre réel u par

$$F_X(u) = \sum_{i=0}^{n} p_i \, u^i .$$

Que vaut $F_X(1)$?

Exprimer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X en fonction de $F'_X(1)$ et $F''_X(1)$ [F'_X et F''_X désignent les dérivées première et seconde de la fonction F_X] .

PROBLEME

Dans tout le problème, a et b désignent des entiers naturels autres que zéro, et l'on note $N = a + b$.

On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, au "hasard" et "avec remise" d'une boule, en procédant de la façon suivante :

- lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant ;
- lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée dans cette urne par une boule blanche et l'on procède alors au tirage suivant.

.../...

PARTIE I

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule *blanche*.

1 - Déterminer la loi de probabilité de Y (ensemble des valeurs prises par Y et probabilité attachée à chacune de ces valeurs).

2 - Soit Z la variable aléatoire définie à partir de Y par la relation $Z = b + 1 - Y$ et pour $k \in \{0, 1, 2, \ldots, b\}$ α_k = Probabilité $(Z=k)$

Que vaut α_0 ? Montrer que, si $1 \leqslant k \leqslant b$ $\alpha_k = \dfrac{b!}{N^b}\left[\dfrac{N^k}{k!} - \dfrac{N^{k-1}}{(k-1)!}\right]$

3 - Soit F_Z la fonction génératrice de Z . Montrer que :

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad F_Z(u) = \frac{b!}{N^b}(1-u)\left[\sum_{k=0}^{b} \frac{(Nu)^k}{k!}\right] + u^{b+1}$$

En déduire l'espérance mathématique de Z puis celle de Y .

PARTIE II

Dans cette partie on note :

- pour tout entier $n \geqslant 1$, q_n la probabilité de l'évènement, noté N_n : "la $n^{ième}$ boule tirée est *noire*" ;
- pour tout entier $n \geqslant 0$, X_n le nombre aléatoire de boules *noires* obtenues au cours des n premiers tirages ;
- pour tous entiers $n \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$, $P(n,k)$ la probabilité de l'événement : "au cours des n premiers tirages, on a obtenu exactement k boules *noires*".

On remarquera que $P(0,0) = 1$ et que $P(n,k) = 0$ si $k > \text{Inf}(n,b)$.

1°) a - En remarquant que l'évènement N_{n-1} et l'évènement contraire $\overline{N}_{n-1}$ constituent un système complet d'évènements et en utilisant la formule des probabilités totales trouver, pour $n \geqslant 2$, une relation de récurrence entre q_n et q_{n-1} .

b - En déduire la valeur de q_n .

2°) a - Que valent $\sum_{k=0}^{n} P(n,k)$; $P(n,0)$; $P(n,n)$?

b - Démontrer, en s'inspirant de la méthode utilisée au II-1°)-a que :

$\forall n \geqslant 1, \forall k \geqslant 1$ $\quad N\,P(n,k) = (a+k)\,P(n-1,k) + (b+1-k)\,P(n-1,k-1)$ (1)

c - On pose, pour $n \geqslant 0$ $u_n = b + \left(\frac{N}{a}\right)^n P(n,1)$. Utiliser la relation (1) pour exprimer u_n en fonction de u_{n-1}. En déduire la valeur de $P(n,1)$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

d - Montrer que la suite $(P(n,b))_{n\in N}$ est croissante, convergente et que sa limite ℓ est inférieure ou égale à 1.

e - Montrer que la suite $(P(n,b-1))_{n\in N}$ converge et donner sa limite. Montrer plus généralement que, pour tout entier naturel $k < b$ la suite $(P(n,k))_{n\in N}$ converge, et donner sa limite. En déduire que $\ell = 1$.

3°) Dans cette question, on demande de déterminer l'espérance mathématique $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n par les deux méthodes suivantes :

a) en remarquant que X_n est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli.

b) en utilisant la relation, valable pour tout entier n :

$$N\, q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (b-k)\, P(n,k)$$

que l'on démontrera en s'inspirant de II-1°)-a.

Quelle est la limite de la suite $(E(X_n))_{n\in N}$ quand n tend vers $+\infty$.

4°) a - Soit Q_n la fonction génératrice de la variable aléatoire X_n. Démontrer, en utilisant la relation (1) que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$N\, Q_n(u) = (a+bu)\, Q_{n-1}(u) + u(1-u)\, Q'_{n-1}(u) \qquad (2)$$

En remarquant que $Q_0(u) = 1$, montrer que la relation (2) permet de déterminer de proche en proche tous les polynômes Q_n. Ecrire, en particulier Q_1 et Q_2.

b - En dérivant (2), trouver une relation de récurrence entre $E(X_n)$ et $E(X_{n-1})$. En déduire à nouveau $E(X_n)$.

c - Déterminer de même une relation de récurrence entre $Q''_n(1)$ et $Q''_{n-1}(1)$ pour $n \geqslant 1$. En déduire que :

$$Q''_n(1) = b(b-1)\left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]$$

Calculer enfin $V(X_n)$ variance de la variable aléatoire X_n. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} V(X_n)$?

.../...

PARTIE III

Dans ce paragraphe, $\mathbb{R}[u]$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels de la variable réelle u, et pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[u]$ le sous-espace vectoriel formé du polynôme nul et des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que $(1, u, \ldots, u^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[u]$, appelée base canonique de $\mathbb{R}_n[u]$. Enfin, un polynôme de $\mathbb{R}[u]$ sera indifféremment noté A ou $A(u)$.

1 - Soit Φ l'application : $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[u] & \longrightarrow & \mathbb{R}[u] \\ A(u) & \longmapsto & (a+bu)A(u) + u(1-u)A'(u) \end{array}$

montrer que Φ est linéaire et qu'il existe un entier r *unique* tel que $\mathbb{R}_r[u]$ soit stable par Φ (c'est-à-dire tel que $\Phi(\mathbb{R}_r[u] \subset \mathbb{R}_r[u])$).

On note, pour cette valeur de r, Φ_r l'endomorphisme de $\mathbb{R}_r[u]$ tel que : $\forall A \in \mathbb{R}_r[u]$ $\Phi_r(A) = \Phi(A)$. Ecrire la matrice B de Φ_r dans la base canonique de $\mathbb{R}_r[u]$.

2 - On suppose ici que $b = 2$: chercher les valeurs propres et les polynômes propres de l'endomorphisme Φ_r correspondant à cette valeur de b.

3 - On revient au cas général $b \geqslant 1$ et l'on appelle polynôme propre de Φ tout polynôme A non nul de $\mathbb{R}[u]$ pour lequel existe un nombre réel λ (appelé valeur propre associée au polynôme propre A) vérifiant $\Phi(A) = \lambda A$.

a) Montrer que, si A est un polynôme propre de Φ, il est nécessairement de degré b, et que le polynôme B défini par $B(u) = A(1-u)$ est également un polynôme propre de Φ. Quel lien existe-t-il entre les valeurs propres associées à A et à B ?

b) Démontrer que les polynômes propres de Φ sont, à une constante multiplicative près non nulle, les polynômes A_k tels que $A_k(u) = u^k(1-u)^{b-k}$ avec $k = 0, 1, 2, \ldots, b$.
Donner la valeur propre associée à chaque polynôme A_k.

4 - Montrer que le système $(A_0, A_1, \ldots, A_b)$ est une base de $\mathbb{R}_b[u]$. Ecrire la matrice P de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_b[u]$ à cette base, la matrice inverse P^{-1} et la matrice produit $P^{-1}BP$.

5 - Quelles sont les coordonnées du polynôme Q_n défini au II-4 dans la base $(A_0, A_1, \ldots, A_b)$? En déduire, pour tous entiers n et k la valeur de $P(n,k)$.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail